Title	指数関数ポテンシャルをもつバネで繋がれた一次元N粒子系：逆スペクトル法による一般解(1)
Author(s)	山崎, 進
Citation	物性研究 (1979), 31(6): 299-312
Issue Date	1979-03-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/89754
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

指数関数ポテンシャルをもつバネで繋がれた一次元N粒子系 —— 逆スペクトル法による一般解(1)

埼玉大・理　山　崎　　進

(1979年2月5日受理)

§1. 指数関数ポテンシャルをもつバネで繋がれた一次元N粒子系を考える。系のハミルトニアンは

$$\mathcal{H}=\sum_{1\leqslant j\leqslant N}\frac{p_j^2}{2m}+\sum_{1\leqslant j\leqslant N-1}\frac{a}{b}e^{b(x_j-x_{j+1})} \tag{1・1}$$

である。これはまた戸田ポテンシャル

$$\phi(x_j-x_{j+1})=\frac{a}{b}e^{b(x_j-x_{j+1})}-a(x_j-x_{j+1})$$
$$(a\cdot b>0)$$

により最隣接相互作用を行っている$(N+2)$粒子系において，両端($j=0,\ N+1$)の粒子を各々$-\infty$及び$+\infty$に固定したものと考えることもできる。ハミルトニアン(1・1)より運動方程式として

$$\begin{cases}\dot{x}_j=\dfrac{p_j}{m}\ , & (1・2\,a)\\ \dot{p}_j=a e^{b(x_{j-1}-x_j)}-a e^{b(x_j-x_{j+1})}\ , & (1・2\,b)\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} j=1,\cdots\cdots,\ N\ ,\\ x_0=-\infty,\quad x_{N+1}=+\infty,\end{pmatrix}$$

を得る。運動方程式(1・2)はVolterra系

$$\dot{a}_j=a_j(a_{j+1}^2-a_{j-1}^2) \tag{1・3}$$

$$\begin{pmatrix} j=1,\cdots\cdots,\ n-1,\\ a_0=a_n=0\qquad ,\end{pmatrix}$$

と密接な関係にあることが知られており，これらに対する逆スペクトル法(逆散乱法)がMoserにより定式化されている。[1,2] Volterra 系（1・3）は Korteweg − de Vries 方程式の離散化としてKac及びvan Moerbekeが導いたので一応K－M方程式とよんでおこう*)。最近Moserの方法を用いてK－M方程式(1・3)の解を完全に記述することが可能であることが示されており，同時に明確にされた二つの方程式系（1・2）及び（1・3）相互の対応関係に基づき運動方程式(1・2)の一般解が得られている[3)]。これは比較的単純なK－M方程式を仲立ちとして戸田方程式の解を求めるというやり方であるが，以下に示すように連分数の構成要素をその部分分数展開の展開係数より計算する処方を与えるStieltjesの公式を用いると，Moserの方法から直接に戸田方程式の解を得ることができる（§ 3）。両者は見かけ上異なる解の表式を与えるが，同一の初期値に対しては当然一致しなければならない。両者が実際に一致することを示し，併せて解がもつ若干の性質について考察したい。

§ 2. 逆スペクトル法[1)]

運動方程式(1・2)は変数変換

$$\begin{cases} \alpha_j = \dfrac{1}{2}\exp\dfrac{\xi_j-\xi_{j+1}}{2} \quad (j=1,\cdots,N-1), & (2\cdot1\,\mathrm{a}) \\[2ex] \beta_j = -\dfrac{1}{2}\zeta_j \quad (j=1,\cdots,N) & (2\cdot1\,\mathrm{b}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_j = bx_j, \\[1ex] \zeta_j = \sqrt{\dfrac{b}{ma}}\;p_j, \end{cases}$$

---

*) Kac及びvan Moerbekeが導いた形は

$$\dot{u}_j = \frac{1}{2}\left(e^{u_{j+1}} - e^{u_{j-1}}\right),$$

であるが，

$$a_j = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{u_j}{2}\right),$$

の置き換えにより（1・3）に帰着される[2)]。

$$\tau = \sqrt{\frac{ab}{m}}\ t,$$

により

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_j = \alpha_j\,(\beta_{j+1} - \beta_j), & (2\cdot 2\,\mathrm{a}) \\ \dot{\beta}_j = 2\,(\alpha_j^2 - \alpha_{j-1}^2), & (2\cdot 2\,\mathrm{b}) \end{cases}$$

$$\alpha_0 = \alpha_N = 0,$$

となるが，これはLaxの形式

$$\dot{L}_N = B_N L_N - L_N B_N, \qquad (2\cdot 3)$$

と同等である。ここでドットはτ微分を表わし，

$$L_N = \begin{bmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & & & & \\ \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & & \mathbf{0} & \\ & \alpha_2 & \beta_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha_{N-2} & \\ & \mathbf{0} & & \alpha_{N-2} & \beta_{N-1} & \alpha_{N-1} \\ & & & & \alpha_{N-1} & \beta_N \end{bmatrix} \qquad (2\cdot 4\,\mathrm{a})$$

$$B_N = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & & & & \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_2 & & \mathbf{0} & \\ & -\alpha_2 & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha_{N-2} & \\ & \mathbf{0} & & -\alpha_{N-2} & 0 & \alpha_{N-1} \\ & & & & -\alpha_{N-1} & 0 \end{bmatrix} \qquad (2\cdot 4\,\mathrm{b})$$

である。 Jacobi 行列L_Nのリゾルベント

$$R(\lambda)=(\lambda E_N - L_N)^{-1}\ (E_N：単位行列),$$

の(1,1)要素を$f(\lambda)$とおけば

$$f(\lambda)=\langle e_1,\ R(\lambda)\ e_1\rangle$$
$$=\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\frac{\langle e_1,\ \psi_k\rangle^2}{\lambda-\lambda_k}\ , \qquad (2\cdot 5\ \mathrm{a})$$

であり同時に

$$f(\lambda)=\cfrac{1}{(\lambda-\beta_1)-\cfrac{\alpha_1^2}{(\lambda-\beta_2)-\cfrac{\alpha_2^2}{\ddots\ (\lambda-\beta_{N-1})-\cfrac{\alpha_{N-1}^2}{(\lambda-\beta_N)}}}}, \qquad (2\cdot 5\ \mathrm{b})$$

と表わされる。ここに$\langle\ \cdots,\ \cdots\rangle$は$N$次元ユークリッド空間$\mathbf{R}^N$における内積を，また$\psi_k$は$L_N$の固有値$\lambda_k$に対する規格化された固有ベクトルを表わし，$e_1=(1,0,0,\cdots,0)$である。Jacobi 行列$L_N$は実単純固有値をもつのでそれらを大きさの順に並べて

$$\lambda_N<\lambda_{N-1}<\cdots<\lambda_2<\lambda_1,$$

としてある。*)。いま，

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\langle e_1,\ \psi_k\rangle^2=1$$

---

*) Moser[1] における定義と少し異なる。Moser[1] では

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{N-1}<\lambda_N$$

であり，また，$R(\lambda)$の$(N,\ N)$要素を$f(\lambda)$としている。

を考慮して変数 R_k ($k=1, \cdots, N$) を

$$\frac{R_k}{\left(\sum_{1\leqq k\leqq N} R_k\right)} = \langle e_1, \psi_k\rangle^2, \tag{2・6}$$

により導入すれば (2・6a) は,

$$f(\lambda)=\frac{1}{\left(\sum_{1\leqq k\leqq N} R_k\right)} \sum_{1\leqq k\leqq N} \frac{R_k}{\lambda-\lambda_k} \tag{2・5 c}$$

となる。ただし R_k には定数倍の不定性が残されている。二つの変数の組,

$$\left\{ (\alpha, \beta)=(\alpha_1, \cdots, \alpha_{N-1}, \beta_1, \cdots, \beta_N) ; \alpha_j > 0 \right\},$$

と

$$\left\{ (\lambda, R)=(\lambda_1, \cdots, \lambda_N, \rho R_1, \cdots, \rho R_N) ; R_j > 0 \right\}$$

ここで ρ ($\neq 0$) は不定定数,

との間の対応は1対1である。この対応により運動方程式 (2・3) は

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_k = 0, & (2・7\text{ a}) \\ \dot{R}_k = 2\lambda_k R_k, & (2・7\text{ b}) \end{cases}$$

と変換され，従って

$$\begin{cases} \lambda_k(\tau)=\lambda_k(0), & (2・8\text{ a}) \\ R_k(\tau)=R_k(0)\cdot e^{2\lambda_k\cdot\tau}, & (2・8\text{ b}) \end{cases}$$

である。

§ 3.　解の構成

Stieltjes[4)]によれば連分数

$$f(\lambda)=\cfrac{A_0}{(\lambda+\gamma_1)-\cfrac{A_1}{(\lambda+\gamma_2)-\cfrac{A_2}{\ddots\;(\lambda+\gamma_{N-1})-\cfrac{A_{N-1}}{(\lambda+\gamma_N)}}}}, \qquad (3\cdot 1\,\mathrm{a})$$

及びそのλの逆巾展開

$$f(\lambda)=\frac{C_0}{\lambda}-\frac{C_1}{\lambda^2}+\cdots+(-1)^{j-1}\frac{C_{j-1}}{\lambda^j}+\cdots-\frac{C_{2N-1}}{\lambda^{2N}}+\cdots, \qquad (3\cdot 1\,\mathrm{b})$$

が与えられたとき，A_j，γ_jはC_jにより次のように表わされる。

$$\begin{cases} A_0 = C_0, \\ A_j = \dfrac{D_{j-1}\cdot D_{j+1}}{D_j^2} \quad (j=1,\ \cdots,\ N-1), \end{cases} \qquad (3\cdot 2\,\mathrm{a})$$

$$\begin{cases} \gamma_1 = C_1/\ C_0, \\ \gamma_j = \dfrac{D_j\cdot E_{j-2}}{D_{j-1}\cdot E_{j-1}}+\dfrac{D_{j-1}\cdot E_j}{D_j\cdot E_{j-1}} \quad (j=2,\ \cdots,\ N) \end{cases} \qquad (3\cdot 2\,\mathrm{b})$$

ただし

$$D_j=\det\begin{bmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_{j-1} \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{j-1} & C_j & \cdots & C_{2j-2} \end{bmatrix},$$

$$E_j = \det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_j \\ C_2 & C_3 & \cdots & C_{j+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_j & C_{j+1} & & C_{2j-1} \end{bmatrix},$$

$$D_0 = E_0 = 1 \qquad ,$$

である。公式（3・2）を適用するために（2・5 c）を変形して，

$$f(\lambda) = \frac{1}{(\sum R_k)} \left\{ \frac{(\sum R_k)}{\lambda} + \frac{(\sum R_k \lambda_k)}{\lambda^2} + \frac{(\sum R_k \lambda_k^2)}{\lambda^3} + \cdots \right\}$$

とする。これを（3・1 b）と比べれば

$$C_j = (-1)^j \left(\sum_{1 \leqq k \leqq N} R_k \lambda_k^j \right) / \left(\sum_{1 \leqq k \leqq N} R_k \right)$$

$$(j = 0, \ 1, \ \cdots\cdots),$$

であることがわかる。いま C_j に代えて d_j を

$$d_j = \sum_{1 \leqq k \leqq N} R_k \lambda_k^{j-1} \ (j = 1, \ 2, \ \cdots), \qquad (3\cdot3)$$

と定義し（3・2）を用いれば α_j，β_j が次のように求められる。

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_j^2 &= P_{2j-3} \cdot P_{2j+1} \ / \ P_{2j-1}^2, && (3\cdot4\,\mathrm{a}) \\ \beta_j &= \frac{P_{2j-4} \cdot P_{2j-1}}{P_{2j-3} \cdot P_{2j-2}} + \frac{P_{2j-3} \cdot P_{2j}}{P_{2j-2} \cdot P_{2j-1}}, && (3\cdot4\,\mathrm{b}) \end{aligned} \right.$$

ここで

$$P_{2l-1} = \det \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_l \\ d_2 & d_3 & \cdots & d_{l+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_l & d_{l+1} & & d_{2l-1} \end{bmatrix}, \tag{3・5 a}$$

$$P_{2l} = \det \begin{bmatrix} d_2 & d_3 & \cdots & d_{l+1} \\ d_3 & d_4 & \cdots & d_{l+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{l+1} & d_{l+2} & & d_{2l} \end{bmatrix}, \tag{3・5 b}$$

$$P_0 = P_{-1} = 1,\quad P_{-2} = 0,$$

である。行列式を展開して P_j を多項式として書き表わせば

$$\begin{cases} P_{2l-1} = \displaystyle\sum_{1\leqslant k_1,\cdots,k_l\leqslant N} R_{k_1}\cdots R_{k_l}\,\lambda_{k_2}\lambda_{k_3}^2\cdots\lambda_{k_l}^{l-1}\cdot \Delta(\lambda_{k_1},\cdots,\lambda_{k_l}), & (3・6\text{ a}) \\ P_{2l} = \displaystyle\sum_{1\leqslant k_1,\cdots,k_l\leqslant N} R_{k_1}\cdots R_{k_l}\,\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}^2\cdots\lambda_{k_l}^{l}\cdot \Delta(\lambda_{k_1},\cdots,\lambda_{k_l}), & (3・6\text{ b}) \end{cases}$$

あるいは

$$P_{2l-1} = \sum_{\{k_1,\cdots,k_l\}} R_{k_1}\cdots R_{k_l}\cdot \Delta(\lambda_{k_1},\cdots,\lambda_{k_l})^2, \tag{3・7 a}$$

$$P_{2l} = \sum_{\{k_1,\cdots,k_l\}} R_{k_1}\cdots R_{k_l}\cdot \lambda_{k_1}\cdots\lambda_{k_l}\cdot \Delta(\lambda_{k_1},\cdots,\lambda_{k_l})^2, \tag{3・7 b}$$

となる。ただし（3・7）式における $\sum_{\{k_1,\cdots,k_l\}}$ は，$\{1, 2, \cdots, N\}$ より取り出した l 個の数 $\{k_1,\cdots,k_l\}$ の ${}_N C_l$ 通りの組み合わせについての和を示し，$\Delta(\lambda_{k_1},\cdots,\lambda_{k_l})$ は差積，即ち Vandermonde の行列式

$$\Delta(\lambda_{k_1},\cdots,\lambda_{k_l}) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant l} (\lambda_{k_j} - \lambda_{k_i})$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \lambda_{k_1} & \lambda_{k_2} & \cdots\cdots\cdots & \lambda_{k_l} \\ \lambda_{k_1}^2 & \lambda_{k_2}^2 & \cdots\cdots\cdots & \lambda_{k_l}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{k_1}^{l-1} & \lambda_{k_2}^{l-1} & \cdots\cdots\cdots & \lambda_{k_l}^{l-1} \end{bmatrix},$$

である。$R_k \fallingdotseq 0$*) なので(3・7)より$P_j > 0$がわかる。また(3・6)あるいは(3・7)より

$$P_{2N} / P_{2N-1} = \lambda_1 \cdots\cdots \lambda_N,$$

となり，これは時間に依らない。

多項式P_jは

$$P_j \cdot \dot{P}_{j+1} - \dot{P}_j \cdot P_{j+1} = 2P_{j-1} \cdot P_{j+2}, \qquad (3 \cdot 8)$$

を満たすことが示される**)。この関係式を用いれば(3・4)式で与えられるα_j, β_jが実際に運動方程式(2・2)を満足することを確かめることができる。関係式(3・8)より

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{2}\,\frac{\dot{P}_1}{P_1}$$

であり，これと(2・1a), (2・2b), (3・4b)よりξ_1が積分され，従ってまた総てのξ_jが次のように求められる。

---

*)　$R_k = 0$とすると$\psi_k = 0$となり，ψ_kが固有ベクトルであることに反する。

**)　K−M方程式経由の解に現われる$\mathcal{P}_j$もまた(3・8)式を満たす。$\mathcal{P}_j$に関する証明[3]がそのまま適用できる。

$$\xi_j(\tau) = \xi_1(0) + \ln\left[\frac{P_1(0)\cdot P_{2j-3}(\tau)}{4^{j-1}\cdot P_{2j-1}(\tau)}\right], \qquad (3\cdot 9)$$

$(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ N)$.

§ 4. K－M方程式経由の解 [3)]

戸田方程式（2・2）とK－M方程式（1・3）（ただし$n=2N$）とは対応関係

$$\begin{cases} \alpha_j = a_{2j-1}\cdot a_{2j}, & (4\cdot 1\mathrm{a}) \\ \beta_j = a_{2j-2}^2 + a_{2j-1}^2, & (4\cdot 1\mathrm{b}) \end{cases}$$

即ち

$$a_1^2 = \beta_1 \qquad (4\cdot 2\mathrm{a})$$

$$a_{2j}^2 = \cfrac{\alpha_j^2}{\beta_j - \cfrac{\alpha_{j-1}^2}{\beta_{j-1} - \cfrac{\alpha_{j-2}^2}{\ddots\ \beta_2 - \cfrac{\alpha_1^2}{\beta_1}}}}, \qquad (4\cdot 2\mathrm{b})$$

$$a_{2j+1}^2 = \beta_{j+1} - a_{2j}^2, \qquad (4\cdot 2\mathrm{c})$$

により相互に変換される。ここで$a_{2j+1}^2 > 0$であるから(α,β)は

$$\beta_{j+1}-\cfrac{\alpha_j^2}{\beta_j-\cfrac{\alpha_{j-1}^2}{\ddots\;\beta_2-\cfrac{\alpha_1^2}{\beta_1}}}>0, \tag{4・3}$$

$$(j=1,\cdots\cdots,\ N-1),$$

を満たす必要がある。このような $(\alpha,\ \beta)\in(\mathbf{R}^+)^{2N-1}$ 全体を $\mathcal{D}_{2N-1}$ で表わそう。

K－M方程式の解は

$$a_j^2=\frac{\mathcal{P}_{j-2}\cdot\mathcal{P}_{j+1}}{\mathcal{P}_{j-1}\cdot\mathcal{P}_j}\quad(j=1,\ \cdots,\ 2N-1), \tag{4・4}$$

で与えられる。ここで

$$\mathcal{P}_{2l-1}=\det\begin{bmatrix}\delta_1 & \delta_2 & \cdots\cdots\cdots\cdots & \delta_l\\ \delta_2 & \delta_3 & \cdots\cdots\cdots & \delta_{l+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \delta_l & \delta_{l+1} & & \delta_{2l-1}\end{bmatrix}, \tag{4・5 a}$$

$$\mathcal{P}_{2l}=\det\begin{bmatrix}\delta_2 & \delta_3 & \cdots\cdots\cdots & \delta_{l+1}\\ \delta_3 & \delta_4 & \cdots\cdots\cdots & \delta_{l+2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \delta_{l+1} & \delta_{l+2} & \cdots\cdots\cdots & \delta_{2l}\end{bmatrix}, \tag{4・5 b}$$

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_{-1} = 1,\quad \mathcal{P}_{-2} = 0,$$

$$\delta_j = \sum_{1 \leqq k \leqq N} \mathcal{R}_k \,(\mu_k^2)^{j-1}, \tag{4・6}$$

であり，留数$\mathcal{R}_k \equiv \mathcal{R}_k(\tau)$は

$$\mathcal{L}_{2N} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & & & & \\ a_1 & 0 & a_2 & & 0 & \\ & a_2 & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & a_{2N-1} \\ & 0 & & & a_{2N-1} & 0 \end{bmatrix}, \tag{4・7}$$

の固有値μ_kに属する規格化された固有ベクトルφ_kを用いて

$$\mathcal{R}_k \Big/ \Big(\sum_{1 \leqq k \leqq N} \mathcal{R}_k \Big) = 2 \langle e_1, \varphi_k \rangle^2, \tag{4・8}$$

と定義される。固有値μ_kは再び大きさの順に

$$\mu_{2N} < \cdots < \mu_{N+1} < 0 < \mu_N < \cdots < \mu_1,$$

と並べられているが

$$\mu_k = -\mu_{2N-k+1},$$

なので

$$\mu_k^2 = \mu_{2N-k+1}^2,$$

である。また

$$\mathcal{R}_k(\tau) = \mathcal{R}_k(0) \cdot e^{2\mu_k^2 \cdot \tau} \tag{4・9}$$

となることがわかる。従って初期値$(\alpha(0),\ \beta(0))$が$\mathcal{D}_{2N-1}$に含まれるときには，

（ⅰ）（4・2），（4・7）より$\tau = 0$での$\mathcal{L}_{2N}$を求め，

（ii） その固有値問題を解いて $\{\mu_k, \mathcal{R}_k(0)\}$ を定め，

（iii） こうして得られたK－M方程式の解（4・4）を（4・1）に代入する

ことにより $(\alpha(\tau), \beta(\tau))$ が求められる。

$(\alpha(0), \beta(0)) \notin \mathcal{D}_{2N-1}$ のときは戸田方程式のGalilei 変換に対する不変性を利用する。

Galilei 変換

$$\begin{cases} \xi_j' = \xi_j - 2\zeta_0\tau, & (4\cdot 10\,\mathrm{a}) \\ \zeta_j' = \zeta_j - 2\zeta_0, & (4\cdot 10\,\mathrm{b}) \end{cases}$$

により α_j， β_j は

$$\begin{cases} \alpha_j' = \alpha_j \quad , & (4\cdot 10\,\mathrm{c}) \\ \beta_j' = \beta_j + \zeta_0, & (4\cdot 10\,\mathrm{d}) \end{cases}$$

と変換されるが，勝手な $(\alpha(0), \beta(0)) \in (\mathbf{R}^+)^{N-1} \times \mathbf{R}^N$ について $\zeta_0 \to \infty$ とすれば $(\alpha'(0), \beta'(0)) \in \mathcal{D}_{2N-1}$ となる。$(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}_{2N-1}$ のときは

$$\lambda_k = \mu_k^2, \qquad (4\cdot 11)$$

の関係があり（§5）従って $\lambda_k > 0$ である。

一方第 j 粒子の $\tau \to \infty$ での漸近速度 $\zeta_j(\infty)$ は

$$\zeta_j(\infty) = -2\lambda_j,$$

となるので，[1] 変換された座標系では総ての粒子が負の漸近速度をもつことになる。

結局，一般解として

$$\begin{cases} \alpha_j^2 = \mathcal{P}_{2j-3} \cdot \mathcal{P}_{2j+1} / \mathcal{P}_{2j-1}^2, & (4\cdot 12\,\mathrm{a}) \\ \beta_j = \dfrac{\mathcal{P}_{2j-4} \cdot \mathcal{P}_{2j-1}}{\mathcal{P}_{2j-3} \cdot \mathcal{P}_{2j-2}} + \dfrac{\mathcal{P}_{2j-3} \cdot \mathcal{P}_{2j}}{\mathcal{P}_{2j-2} \cdot \mathcal{P}_{2j-1}} - \zeta_0 \ , & (4\cdot 12\,\mathrm{b}) \end{cases}$$

が得られる。ここでζ_0は$(\alpha'(0),\ \beta'(0))\in\mathscr{D}_{2N-1}$となるように選ばれる。解(4・12)は(ⅰ)〜(ⅲ)の手順により求められた$(\alpha'(\tau),\ \beta'(\tau))$を逆変換したものである。

二つの解の表式(3・4)及び(4・12)が実際に一致することを見るには，次の(Ⅰ)及び(Ⅱ)が示されれば十分である。

(Ⅰ),

$$\begin{cases} \lambda_k = \mu_k^2, & (4\cdot 11) \\ R_k(0) = \mathscr{R}_k(0), & (4\cdot 13) \end{cases}$$

ただし，$(\alpha(0),\ \beta(0))\in\mathscr{D}_{2N-1}$とする。

(Ⅱ),

$$\begin{cases} P'_{2j-3}\cdot P'_{2j+1}/\,(P'_{2j-1})^2 = P_{2j-3}\cdot P_{2j+1}/\,P^2_{2j-1}, & (4\cdot 14\,\mathrm{a}) \\ \dfrac{P'_{2j-4}\cdot P'_{2j-1}}{P'_{2j-3}\cdot P'_{2j-2}}+\dfrac{P'_{2j-3}\cdot P'_{2j}}{P'_{2j-2}\cdot P'_{2j-1}} = \dfrac{P_{2j-4}\cdot P_{2j-1}}{P_{2j-3}\cdot P_{2j-2}}+\dfrac{P_{2j-3}\cdot P_{2j}}{P_{2j-2}\cdot P_{2j-1}}+\zeta_0, & (4\cdot 14\,\mathrm{b}) \end{cases}$$

ここでP'_jは$(\alpha'(0),\ \beta'(0))=(\alpha_1(0),\ \cdots,\ \alpha_{N-1}(0),\ \beta_1(0)+\zeta_0,\ \cdots,\ \beta_N(0)+\zeta_0)$なる初期値に対する$P_j$を表わす。

参 考 文 献

1) J. Moser, Dynamical Systems, Theory and Applications, Lecture Notes in Physics 38, (Springer Verlag, 1975), p. 467.

2) J. Moser, Adv. in Math, **16** (1975), 197.

3) T. Kotera, S. Yamazaki, J. Phys. Soc. Japan, **43** (1977), 1797.

4) T. J. Stieltjes, Ann. Fac. Toulouse VIII (1894).